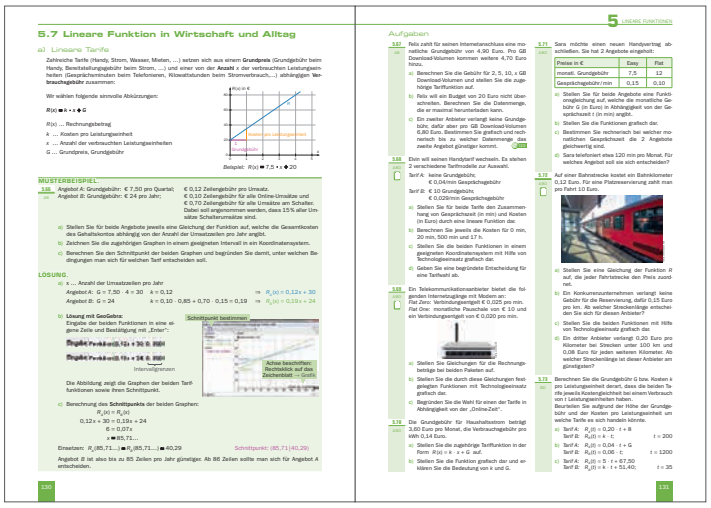
# 1. Konzept Angewandte Mathematik@HAK

## MOTIVIERENDE EINSTIEGSSEITE

Eine **Einstiegsseite** bietet einen Überblick über die wesentlichen Inhalte des Kapitels. Sie wird als Illustration mit einem kurzen Einleitungstext gestaltet und präsentiert in vernetzter Form Lernziele, neue Begriffe, typische Bilder oder Grafiken sowie zentrale Grundvorstellungen, die im Kapitel aufgegriffen werden.

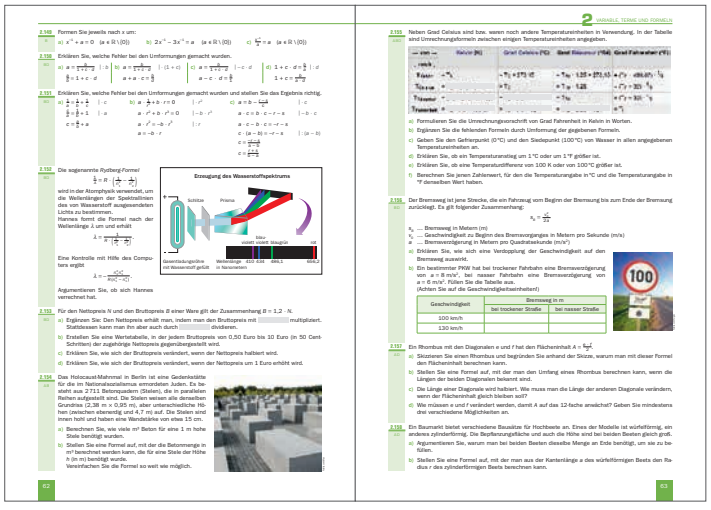
## ÜBERSICHTLICHES DOPPELSEITENPRINZIP

Das Lehrwerk baut auf Doppelseiten auf: Neue mathematische Inhalte werden auf einer linken Seite eingeführt, auf der danebenliegenden rechten Seite finden sich Übungsaufgaben dazu. **Theorieseiten** und **Übungsseiten** wechseln einander ab. Jede dieser Doppelseiten ist so konzipiert, dass sie 1–2 Unterrichtsstunden abdeckt.

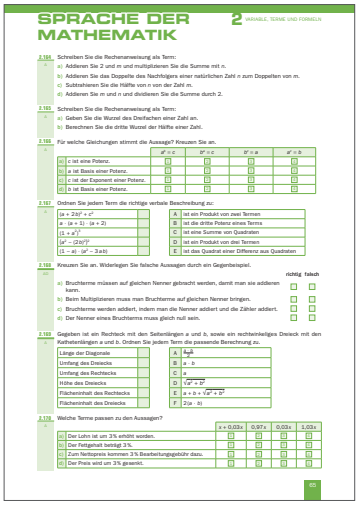



## VERMISCHTE AUFGABEN ZUM WEITERÜBEN UND WIEDERHOLEN

Nach dem letzten inhaltlichen Abschnitt folgen 3–7 Seiten **„Vermischte Aufgaben“**, in denen die Inhalte des gesamten Kapitels wiederholt und vernetzt werden.
Am Ende dieses Abschnitts sind einige englischsprachige Aufgaben integriert.




© VERITAS-Verlag, Linz


SPRACHE DER MATHEMATIK 2 VARIABLE, TERME UND FORMELN

2.164 Schreiben Sie die Rechenanweisung als Term:
a) Addieren Sie 2 und m und multiplizieren Sie die Summe mit n.
b) Addieren Sie das Doppelte des Nachfolgers einer natürlichen Zahl n zum Doppelten von m.
c) Subtrahieren Sie die Hälfte von n von der Zahl m.
d) Addieren Sie m und n und dividieren Sie die Summe durch 2.

2.165 Schreiben Sie die Rechenanweisung als Term:
a) Geben Sie die Wurzel des Dreifachen einer Zahl an.
b) Berechnen Sie die dritte Wurzel der Hälfte einer Zahl.

2.166 Für welche Gleichungen stimmt die Aussage? Kreuzen Sie an.

| | $a^x = c$ | $b^n = c$ | $b^n = a$ | $a^n = b$ |
|---|---|---|---|---|
| a) $c$ ist eine Potenz. | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| b) $a$ ist Basis einer Potenz. | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| c) $c$ ist der Exponent einer Potenz. | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| d) $b$ ist Basis einer Potenz. | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

2.167 Ordnen Sie jedem Term die richtige verbale Beschreibung zu:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(a + 2)(b + c)$ | | A | ist ein Produkt von zwei Termen |
| $(a - (a + 1) \cdot (a + 2)$ | | B | ist die dritte Potenz eines Terms |
| $(1 + a^2)^3$ | | C | ist eine Summe von Quadraten |
| $(a^2 - (2a)^2)$ | | D | ist ein Produkt von drei Termen |
| $(1 - a) \cdot (a^2 - 3\,a\,b)$ | | E | ist das Quadrat einer Differenz aus Quadraten |

2.168 Kreuzen Sie an. Widerlegen Sie falsche Aussagen durch ein Gegenbeispiel.

| | richtig | falsch |
|---|---|---|
| a) Bruchterme müssen auf gleichen Nenner gebracht werden, damit man sie addieren kann. | ☐ | ☐ |
| b) Beim Multiplizieren muss man Brüche auf gleichen Nenner bringen. | ☐ | ☐ |
| c) Bruchterme werden addiert, indem man die Nenner addiert und die Zähler addiert. | ☐ | ☐ |
| d) Der Nenner eines Bruchterms muss gleich null sein. | ☐ | ☐ |

2.169 Gegeben ist ein Rechteck mit den Seitenlängen $a$ und $b$, sowie ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Kathetenlängen $a$ und $b$. Ordnen Sie jedem Term die passende Berechnung zu.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Länge der Diagonale | | A | $\frac{a \cdot b}{2}$ |
| Umfang des Dreiecks | | B | $a \cdot b$ |
| Umfang des Rechtecks | | C | $a$ |
| Höhe des Dreiecks | | D | $\sqrt{a^2 + b^2}$ |
| Flächeninhalt des Rechtecks | | E | $a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$ |
| Flächeninhalt des Dreiecks | | F | $2 (a \cdot b)$ |

2.170 Welche Terme passen zu den Aussagen?

| | $x + 0{,}03x$ | $0{,}97x$ | $0{,}03x$ | $1{,}03x$ |
|---|---|---|---|---|
| a) Der Lohn ist um 3% erhöht worden. | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| b) Der Fettgehalt beträgt 3%. | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| c) Zum Nettopreis kommen 3% Bearbeitungsgebühr dazu. | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| d) Der Preis wird um 3% gesenkt. | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

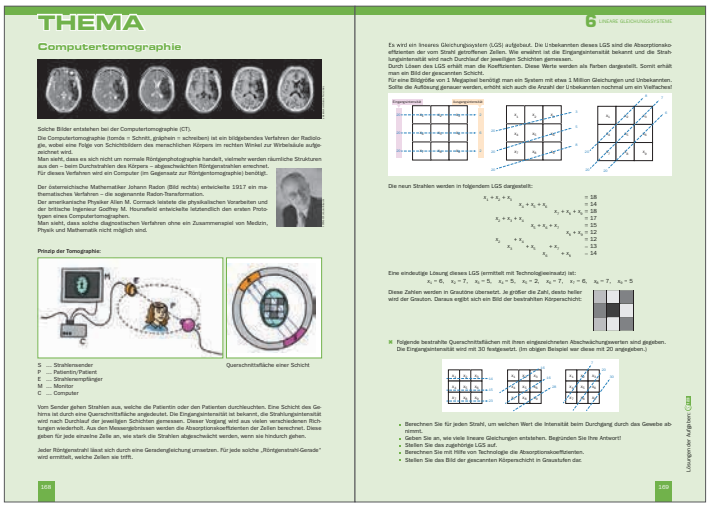
65

## SPRACHE DER MATHEMATIK

In jedem Kapitel wird nun eine Seite zur **„Sprache der Mathematik“** angeboten.
Hier werden die für das Kapitel wesentlichen Begriffe der Fachsprache und die relevanten Modellierungsaspekte wiederholt und reflektiert.

## THEMATISCHE EIN- UND AUSBLICKE

Die folgende **Themen-Doppelseite** ist in jedem Kapitel unterschiedlich gestaltet und bietet motivierende Anwendungen, Ausblicke, Vertiefungen und Projektvorschläge. Sowohl Inhalt als auch aufwendigere grafische Gestaltung sollen SchülerInnen zum Lesen und Bearbeiten einladen.


THEMA

Computertomographie

Solche Bilder entstehen bei der Computertomographie (CT).
Die Computertomographie (tomós = Schnitt, gráphein = schreiben) ist ein bildgebendes Verfahren der Radiologie, wobei eine Folge von Schichtbildern des menschlichen Körpers im rechten Winkel zur Wirbelsäule aufgezeichnet wird.
Man sieht, dass es sich nicht um normale Röntgenphotographie handelt, vielmehr werden räumliche Strukturen aus den – beim Durchstrahlen des Körpers – abgeschwächten Röntgenstrahlen errechnet.
Für dieses Verfahren wird ein Computer (im Gegensatz zur Röntgentomographie) benötigt.

Der österreichische Mathematiker Johann Radon (Bild rechts) entwickelte 1917 ein mathematisches Verfahren – die sogenannte Radon-Transformation.
Der amerikanische Physiker Allen M. Cormack leistete die physikalischen Vorarbeiten und der britische Ingenieur Godfrey M. Hounsfield entwickelte letztendlich den ersten Prototypen eines Computertomographen.
Man sieht, dass solche diagnostischen Verfahren ohne ein Zusammenspiel von Medizin, Physik und Mathematik nicht möglich sind.

Prinzip der Tomographie:

S ... Strahlensender
P ... Patientin/Patient
F ... Strahlenempfänger
M ... Monitor
C ... Computer

Querschnittsfläche einer Schicht

Vom Sender gehen Strahlen aus, welche die Patientin oder den Patienten durchleuchten. Eine Schicht des Gehirns ist durch eine Querschnittsfläche angedeutet. Die Eingangsintensität ist bekannt, die Strahlungsintensität wird nach Durchlauf der jeweiligen Schichten gemessen. Dieser Vorgang wird aus vielen verschiedenen Richtungen wiederholt. Aus den Messergebnissen werden die Absorptionskoeffizienten der Zellen berechnet. Diese geben für jede einzelne Zelle an, wie stark die Strahlen abgeschwächt werden, wenn sie hindurch gehen.

Jeder Röntgenstrahl lässt sich durch eine Geradengleichung umwelten. Für jede solche „Röntgenstrahl-Gerade“ wird ermittelt, welche Zellen sie trifft.

169

6 LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Es wird ein lineares Gleichungssystem (LGS) aufgebaut. Die Unbekannten dieses LGS sind die Absorptionskoeffizienten der vom Strahl getroffenen Zellen. Wie erwähnt ist die Eingangsintensität bekannt und die Strahlungsintensität wird nach Durchlauf der jeweiligen Schichten gemessen.
Durch Lösen des LGS erhält man die Koeffizienten. Diese Werte werden als Farben dargestellt. Somit erhält man ein Bild der gescannten Schicht.
Für eine Bildgröße von 1 Megapixel benötigt man ein System mit etwa 1 Million Gleichungen und Unbekannten. Sollte die Auflösung genauer werden, erhöht sich auch die Anzahl der Unbekannten nochmal um ein Vielfaches!

Die neun Strahlen werden in folgendem LGS dargestellt:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 18 \\ x_4 + x_5 + x_6 &= 14 \\ x_7 + x_8 + x_9 &= 18 \\ x_1 + x_4 + x_7 &= 17 \\ x_2 + x_5 + x_8 &= 15 \\ x_3 + x_6 + x_9 &= 12 \\ x_2 + x_4 &= 13 \\ x_6 + x_8 &= 14 \end{aligned}$$

Eine eindeutige Lösung dieses LGS (ermittelt mit Technologieeinsatz) ist:
$x_1 = 6,\ x_2 = 7,\ x_3 = 5,\ x_4 = 5,\ x_5 = 2,\ x_6 = 7,\ x_7 = 6,\ x_8 = 7,\ x_9 = 5$

Diese Zahlen werden in Grautöne übersetzt. Je größer die Zahl, desto heller wird der Grauton. Daraus ergibt sich ein Bild der bestrahlten Körperschicht:

Folgende bestrahlte Querschnittsflächen mit ihren eingezeichneten Abschwächungswerten sind gegeben. Die Eingangsintensität wird mit 30 festgesetzt. (Im obigen Beispiel war diese mit 20 angegeben.)

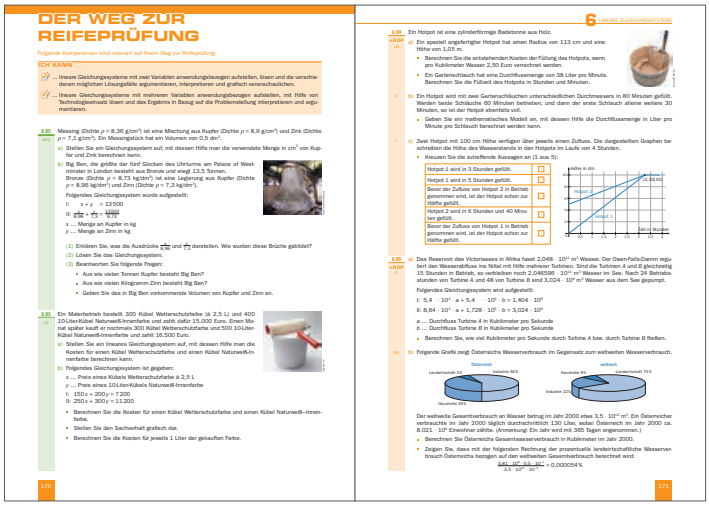
- Berechnen Sie für jeden Strahl, um welchen Wert die Intensität beim Durchgang durch das Gewebe abnimmt.
- Geben Sie an, wie viele lineare Gleichungen entstehen. Begründen Sie Ihre Antwort!
- Stellen Sie das zugehörige LGS auf.
- Berechnen Sie mit Hilfe von Technologie die Absorptionskoeffizienten.
- Stellen Sie das Bild der gescannten Körperschicht in Grautönen dar.

Lösungen der Aufgaben: S. 173

169

## DER WEG ZUR REIFEPRÜFUNG

„**Der Weg zur Reifeprüfung**“: Auf den letzten Seiten jedes Kapitels werden bereits ab dem 1. Band zunächst die für die RDP wesentlichen Kompetenzen aufgelistet. Es folgen Übungsaufgaben, in denen diese Kompetenzen zur Gänze abgebildet sind. Jedes Kapitel wird mit einigen Aufgaben, die inhaltlich und formal die Anforderungen an schriftliche RDP-Aufgaben erfüllen, abgeschlossen.


DER WEG ZUR REIFEPRÜFUNG

Folgende Kompetenzen sind relevant auf ihrem Weg zur Reifeprüfung:

ICH KANN ...

- ... lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen anwendungsbezogen aufstellen, lösen und die verschiedenen möglichen Lösungsfälle argumentieren, interpretieren und grafisch veranschaulichen.
- ... lineare Gleichungssysteme mit mehreren Variablen anwendungsbezogen aufstellen, mit Hilfe von Technologieeinsatz lösen und das Ergebnis in Bezug auf die Problemstellung interpretieren und argumentieren.

6.161 Messing (Dichte $\rho = 8{,}36\ g/cm^3$) ist eine Mischung aus Kupfer (Dichte $\rho = 8{,}9\ g/cm^3$) und Zink (Dichte $\rho = 7{,}2\ g/cm^3$). Ein Messinggelück hat ein Volumen von 0,5 $dm^3$.
a) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dessen Hilfe man die verwendete Menge in $cm^3$ von Kupfer und Zink berechnen kann.
b) Big Ben, die größte der fünf Glocken des Uhrturms am Palace of Westminster in London besteht aus Bronze und wiegt 13,5 Tonnen.
Bronze (Dichte $\rho = 8{,}73\ kg/dm^3$) ist eine Legierung aus Kupfer (Dichte $\rho = 8{,}96\ kg/dm^3$) und Zinn (Dichte $\rho = 7{,}3\ kg/dm^3$).
Folgendes Gleichungssystem wurde aufgestellt:
I: $x + y = 13\,500$
II: $\frac{x}{8{,}96} + \frac{y}{7{,}3} = \frac{13\,500}{8{,}73}$
$x$ ... Menge an Kupfer in kg
$y$ ... Menge an Zinn in kg
(1) Erklären Sie, was die Ausdrücke $\frac{x}{8{,}96}$ und $\frac{y}{7{,}3}$ darstellen. Wie wurden diese Brüche gebildet?
(2) Lösen Sie das Gleichungssystem.
(3) Beantworten Sie folgende Fragen:
- Aus wie vielen Tonnen Kupfer besteht Big Ben?
- Aus wie vielen Kilogramm Zinn besteht Big Ben?
- Geben Sie das in Big Ben vorkommende Volumen von Kupfer und Zinn an.

6.162 Ein Malerbetrieb bestellt 300 Kübel Wetterschutzfarbe (à 2,5 L) und 400 10-Liter-Kübel Naturweiß-Innenfarbe und zahlt dafür 15.000 Euro. Einen Monat später kauft er nochmals 300 Kübel Wetterschutzfarbe und 500 10-Liter-Kübel Naturweiß-Innenfarbe und zahlt 16.500 Euro.
a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, mit dessen Hilfe man die Kosten für einen Kübel Wetterschutzfarbe und einen Kübel Naturweiß-Innenfarbe berechnen kann.
b) Folgendes Gleichungssystem ist gegeben:
$x$ ... Preis eines Kübels Wetterschutzfarbe à 2,5 L
$y$ ... Preis eines 10-Liter-Kübels Naturweiß-Innenfarbe
I: $150\,x + 200\,y = 7\,200$
II: $250\,x + 300\,y = 11\,200$
- Berechnen Sie die Kosten für einen Kübel Wetterschutzfarbe und einen Kübel Naturweiß–Innenfarbe.
- Stellen Sie den Sachverhalt grafisch dar.
- Berechnen Sie die Kosten für jeweils 1 Liter der gekauften Farbe.

170

6 LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

6.160 LÖSEN a) Ein Hotpot ist eine zylinderförmige Badetonne aus Holz.
Ein speziell angefertigter Hotpot hat einen Radius von 113 cm und eine Höhe von 1,05 m.
- Berechnen Sie die entstehenden Kosten der Füllung des Hotpots, wenn pro Kubikmeter Wasser 2,50 Euro verrechnet werden.
- Ein Gartenschlauch hat eine Durchflussmenge von 38 Liter pro Minute. Berechnen Sie die Füllzeit des Hotpots in Stunden und Minuten.

b) Ein Hotpot wird mit zwei Gartenschläuchen unterschiedlichen Durchmessers in 80 Minuten gefüllt. Werden beide Schläuche 60 Minuten betrieben, und dann der erste Schlauch alleine weitere 30 Minuten, so ist der Hotpot ebenfalls voll.
- Geben Sie ein mathematisches Modell an, mit dessen Hilfe die Durchflussmenge in Liter pro Minute pro Schlauch berechnet werden kann.

c) Zwei Hotpot mit 100 cm Höhe verfügen über jeweils einen Zufluss. Die dargestellten Graphen beschreiben die Höhe des Wasserstands in den Hotpots im Laufe von 4 Stunden.
- Kreuzen Sie die zutreffende Aussagen an (1 aus 5):

| | |
|---|---|
| Hotpot 1 wird in 3 Stunden gefüllt. | ☐ |
| Hotpot 1 wird in 5 Stunden gefüllt. | ☐ |
| Bevor der Zufluss von Hotpot 2 in Betrieb genommen wird, ist der Hotpot schon zur Hälfte gefüllt. | ☐ |
| Hotpot 2 wird in 6 Stunden und 40 Minuten gefüllt. | ☐ |
| Bevor der Zufluss von Hotpot 1 in Betrieb genommen wird, ist der Hotpot schon zur Hälfte gefüllt. | ☐ |

6.163 LÖSEN a) Das Reservoir des Victorasees in Afrika fasst 2.048 · $10^{21}$ $m^3$ Wasser. Der Owen-Falls-Damm reguliert den Wasserabfluss ins Niltal mit Hilfe mehrerer Turbinen. Sind die Turbinen A und B gleichzeitig 15 Stunden in Betrieb, so verbleiben noch 2,046596 · $10^{21}$ $m^3$ Wasser im See. Nach 24 Betriebsstunden von Turbine A und 48 von Turbine B sind 3,024 · $10^9$ $m^3$ Wasser aus dem See gepumpt.
Folgendes Gleichungssystem wird aufgestellt:
I: 5,4 · $10^3$ · $a$ + 5,4 · $10^3$ · $b$ = 1,404 · $10^9$
II: 8,64 · $10^4$ · $a$ + 1,728 · $10^5$ · $b$ = 3,024 · $10^9$
$a$ ... Durchfluss Turbine A in Kubikmeter pro Sekunde
$b$ ... Durchfluss Turbine B in Kubikmeter pro Sekunde
- Berechnen Sie, wie viel Kubikmeter pro Sekunde durch Turbine A bzw. durch Turbine B fließen.

b) Folgende Grafik zeigt Österreichs Wasserverbrauch im Gegensatz zum weltweiten Wasserverbrauch.

Der weltweite Gesamtverbrauch an Wasser betrug im Jahr 2000 etwa 3,5 · $10^{12}$ $m^3$. Ein Österreicher verbrauchte im Jahr 2000 täglich durchschnittlich 130 Liter, weder Österreich im Jahr 2000 ca. 8,021 · $10^9$ Einwohner zählte. (Anmerkung: Ein Jahr wird mit 365 Tagen angenommen.)
- Berechnen Sie Österreichs Gesamtwasserverbrauch in Kubikmeter im Jahr 2000.
- Zeigen Sie, dass mit der folgenden Rechnung der prozentuelle landwirtschaftliche Wasserverbrauch Österreichs bezogen auf den weltweiten Gesamtverbrauch berechnet wird:
$\frac{8{,}63 \cdot 10^9 \cdot 0{,}3 \cdot 70}{3{,}5 \cdot 10^{12} \cdot 10^2} = 0{,}000054\,\%$

171